

Trigonometria, do grego, *trigono* (triângulo) e *metrein* (medidas) é a parte da matemática que estuda as relações existentes entre os lados e os ângulos dos triângulos.

A trigonometria é uma área da matemática que estuda as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo. Ela surgiu da necessidade de resolver problemas práticos, especialmente em situações em que não é possível medir diretamente uma distância ou uma altura. Ela trabalha com relações fixas entre lados e ângulos de triângulos. Então, se você consegue medir um ângulo e uma distância acessível, pode descobrir outra distância que seria impossível medir diretamente. Essa ideia é a base de grande parte das aplicações da trigonometria no mundo real.

Por isso, ela é amplamente utilizada em áreas como navegação, engenharia, topografia, astronomia e até mesmo em situações cotidianas, como medir a altura de um prédio usando apenas um ponto de observação.

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Razões trigonométricas: são o resultado da divisão entre as medidas de dois lados de um triângulo retângulo, o qual recebe esse nome por apresentar um ângulo chamado de reto (90°).

As principais razões trigonométricas são: seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tg). São formadas por dois catetos (oposto e adjacente) e a hipotenusa. As fórmulas mais usadas para as razões trigonométricas são:

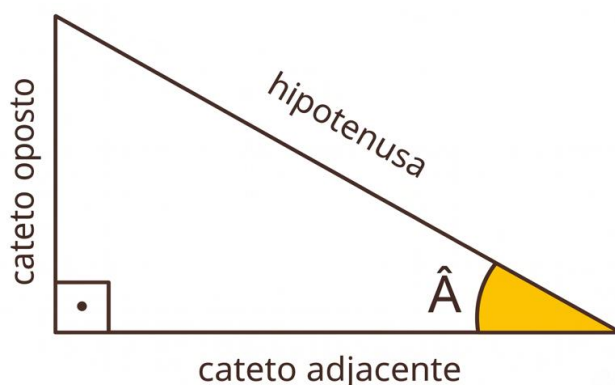
$$\text{seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{seno}}{\text{cosseno}}$$

Na figura abaixo temos um triângulo retângulo contendo um ângulo agudo (menor que 90°) $\hat{A}$, neste triângulo a hipotenusa (maior lado do triângulo) é o lado oposto ao ângulo de 90° , o cateto oposto é o lado em frente ao ângulo $\hat{A}$ e o cateto adjacente é o lado que forma o ângulo $\hat{A}$, conforme figura abaixo:



$$\text{sen}\hat{A} = \frac{\text{cateto oposto ao } \hat{A}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos}\hat{A} = \frac{\text{cateto adjacente ao } \hat{A}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\hat{A} = \frac{\text{cateto oposto ao } \hat{A}}{\text{cateto adjacente ao } \hat{A}}$$

Ângulos notáveis: os ângulos de 30° , 45° e 60° são chamados notáveis por causa da frequência com que surgem em problemas e da grande importância para a Trigonometria. É importante decorar seus valores, completando a tabela abaixo:

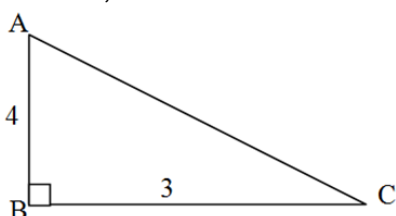
	30°	45°	60°
sen			
cos			
tg			

Dica: 1,2,3...3,2,1. Tudo sobre dois, raiz em cada um.

Exemplos:

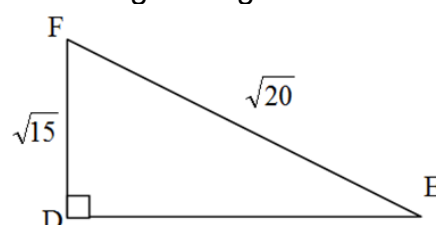
1) No triângulo abaixo, calcule:

- senÂ;
- cosÂ;
- tanÂ;
- senC;
- cosC;
- tanC.



2) Calcule a partir da figura seguinte:

- senÊ;
- cosÊ;
- tanÊ;
- senF;
- cosF;
- tanF.



OBS.: o seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complementar (sen60° = cos30°) e vice-versa. E a tangente de um ângulo é igual ao inverso da tangente do ângulo complementar.

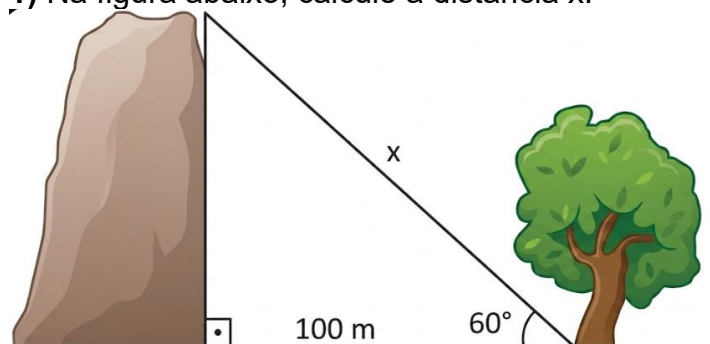
3) Os catetos de um triângulo retângulo medem 15m e 20m, o ângulo oposto ao cateto 20 é β e o outro ângulo agudo mede α, calcule o valor de:

- senα;
- cosα;
- tanα;
- senβ;
- cosβ;
- tanβ.

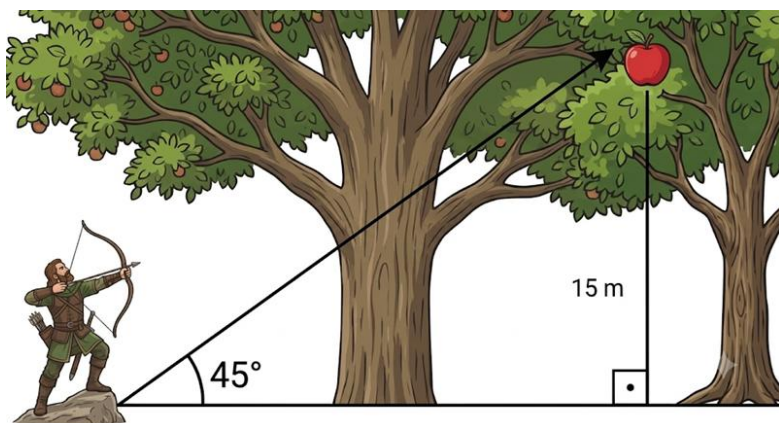
Respostas: 1)a)3/5 b)4/5 c)3/4 d)4/5 e)3/5 f)4/3 2)a)√3/2 b)1/2 c)√3 d)1/2 e)√3/2 f)√3/3 3)a)3/5 b)4/5 c)3/4 d)4/5 e)3/5 f)4/3

APLICAÇÕES DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

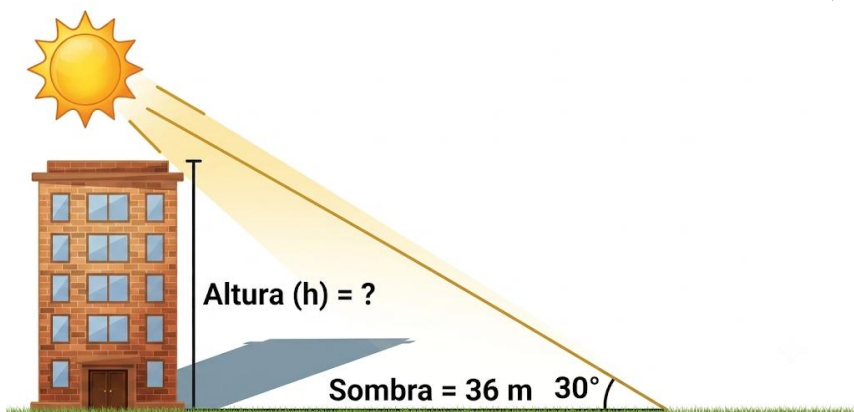
1) Na figura abaixo, calcule a distância x:



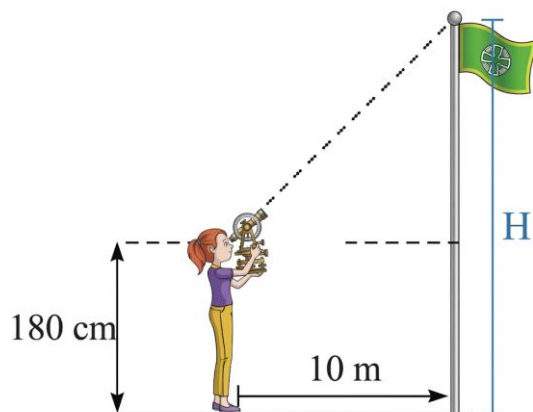
2) Um arqueiro lança uma flecha, formando com o solo um ângulo de 45°. Qual a distância aproximada, percorrida (no ar), pela flecha, do ponto de lançamento até atingir 15 metros de altura? Considere $\sqrt{2} = 1,4$



3) Um edifício projeta uma sombra de 36 metros quando os raios de sol formam um ângulo de 30° com o chão. Qual é a altura do edifício? Considere $\sqrt{3} = 1,7$



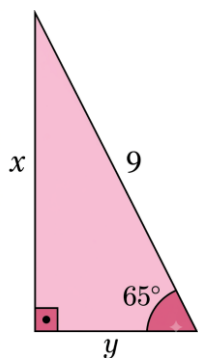
4) Uma pessoa de 1,8 metros de altura, situada a 3 metros de um mastro de bandeira vê o seu topo sob um ângulo de 25° . Qual é a altura do mastro? Considere $\text{tg } 25^\circ = 0,47$



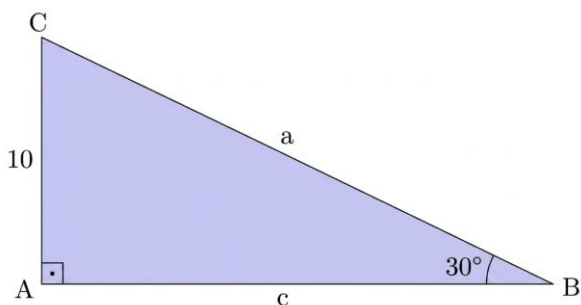
Respostas: 1) 200 m 2) 21 m 3) 20,4 m 4) 6,5 m

EXERCÍCIOS DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

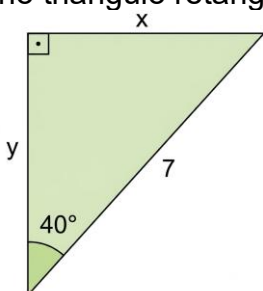
1. No triângulo retângulo determine as medidas x e y indicadas. (Use: $\text{sen } 65^\circ = 0,91$; $\text{cos } 65^\circ = 0,42$ e $\text{tg } 65^\circ = 2,14$)



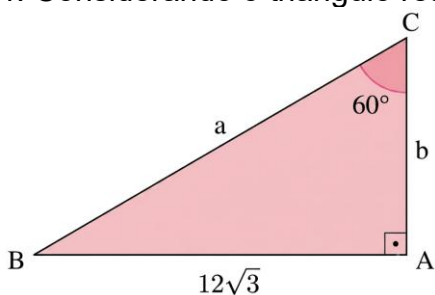
2. Determine no triângulo retângulo ABC as medidas **a** e **c** indicadas.



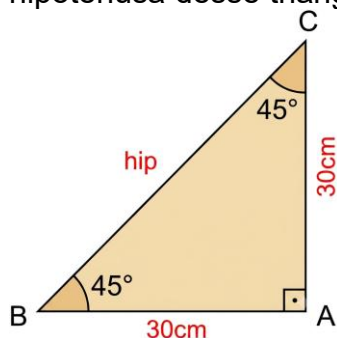
3. Sabendo que $\sin 40^\circ = 0,64$; $\cos 40^\circ = 0,77$ e $\operatorname{tg} 40^\circ = 0,84$ calcule as medidas **x** e **y** indicadas no triângulo retângulo.



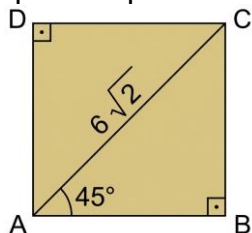
4. Considerando o triângulo retângulo ABC, determine as medidas **a** e **b** indicadas.



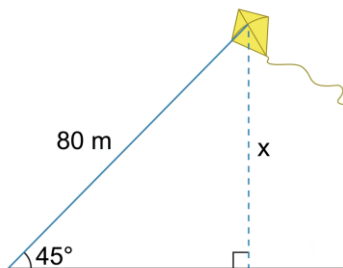
5. Em um triângulo retângulo isósceles, cada cateto mede 30cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo. Dica: é possível usar o Teorema de Pitágoras.



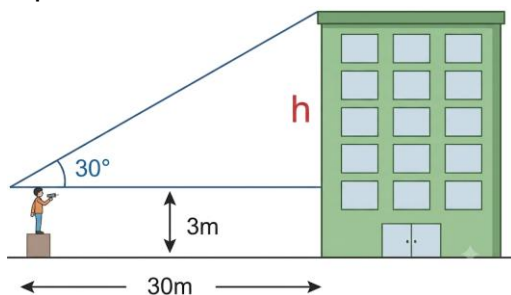
6. A diagonal de um quadrado mede $6\sqrt{2}$ cm, conforme nos mostra a figura. Nessas condições, qual é o perímetro desse quadrado? Dica: é possível usar o Teorema de Pitágoras.



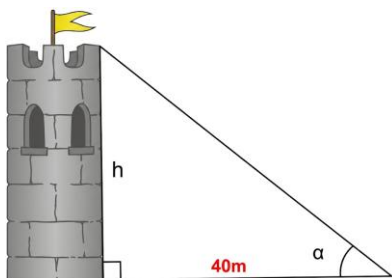
7. Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de 45° com o solo. O comprimento do fio é 80m. Determine a altura da pipa em relação ao solo. Dado $\sqrt{2} = 1,41$



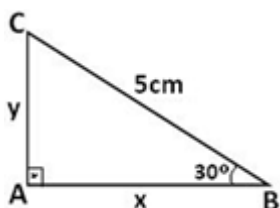
8. Para determinar a altura de um edifício, um observador coloca-se a 30m de distância e assim o observa segundo um ângulo de 30° , conforme mostra a figura. Calcule a altura do edifício medida a partir do solo horizontal. Dado $\sqrt{3} = 1,73$



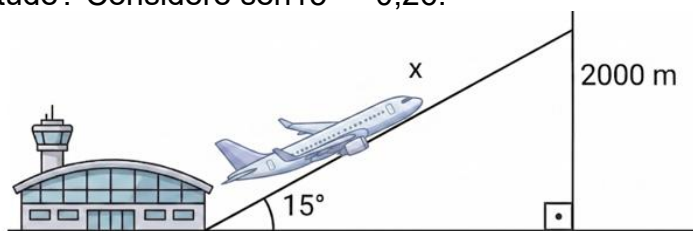
9. A uma distância de 40m, uma torre é vista sob um ângulo α , como mostra a figura. Determine a altura h da torre se $\alpha = 30^\circ$. Dado: $\sqrt{3} = 1,73$



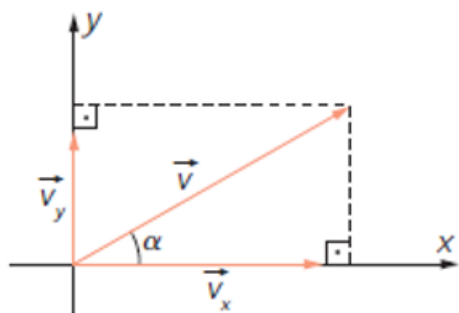
10. Em um triângulo ABC, retângulo em **A**, o ângulo **B** mede 30° e a hipotenusa mede 5cm. Determine as medidas dos catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ desse triângulo. Dado: $\sqrt{3} = 1,73$



11) Um avião parte do aeroporto numa trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 15° . Qual a distância por ele percorrida (no ar), do ponto de decolagem até atingir 2000 metros de altitude? Considere $\sin 15^\circ = 0,26$.



12) Na figura, a velocidade resultante é $V = 10 \text{ m/s}$ e o ângulo alfa vale 30° , calcule as velocidades horizontal V_x e vertical V_y .



Respostas: 1) $x = 8,19$ e $y = 3,78$ 2) $a = 20$ e $c = 10\sqrt{3}$ 3) $x = 4,48$ e $y = 5,39$ 4) $a = 24$ e $b = 12$ 5) $30\sqrt{2}$ 6) 24 7) 56,4 8) 20,3 9) 23 10) 2,5 e 4,33 11) 7692 m 12) $V_x = 5\sqrt{3}$ e $V_y = 5$

TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULOS QUAISQUER

A trigonometria no ensino médio começa nos triângulos retângulos, onde seno, cosseno e tangente são simples de usar. Mas, quando o triângulo não é retângulo, recorremos às **Leis dos Senos e dos Cossenos**, que permitem relacionar lados e ângulos em qualquer triângulo.

Embora funcionem também em triângulos retângulos, não as usamos nesses casos, porque as razões trigonométricas tradicionais são muito mais práticas.

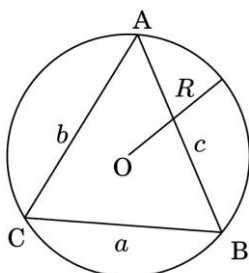
Além delas, existe a Lei das Tangentes, mas ela não costuma ser estudada no ensino médio, aparecendo apenas em conteúdos mais avançados.

Assim, o resumo essencial é:

- **triângulo retângulo: razões trigonométricas;**

- **triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.**

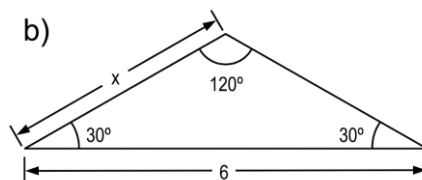
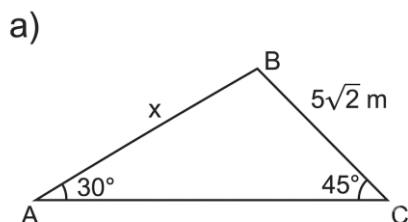
Lei dos Senos: em qualquer triângulo a razão entre a medida do lado e o seno do ângulo oposto é constante e o valor dessa constante é o diâmetro da circunferência que esse triângulo está inscrito.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Exemplos:

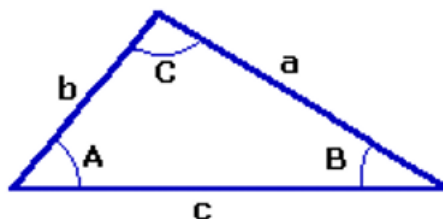
- 1) Calcule o raio da circunferência circunscrita a um triângulo do qual se conhecem um lado $a = 10$ cm e o ângulo oposto a esse lado $\hat{A} = 60^\circ$.
- 2) Num triângulo ABC, são dados $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ e $AB = 2\sqrt{2}$. Calcule a medida do lado BC.
- 3) Com os dados das figuras a seguir, calcule o valor de x.



Dado: $\sin 120^\circ \approx 0,87$

Respostas: 1) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm 2) $2\sqrt{3}$ 3)a) 10 m b) 3,45 aproximadamente

Lei dos Cossenos: a lei dos cossenos é uma extensão do teorema de Pitágoras para caso de triângulos que não sejam retos, em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados, corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles.



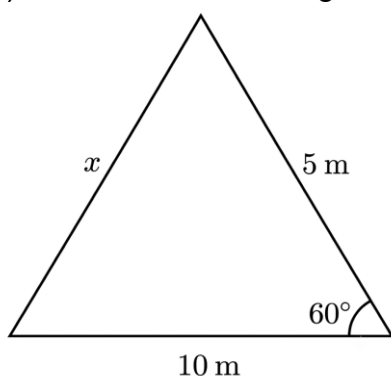
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

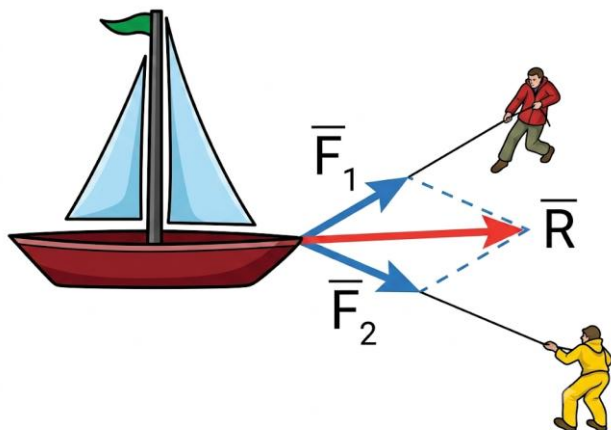
Exemplos:

- 1) Com os dados das figura a seguir, calcule o valor de x.



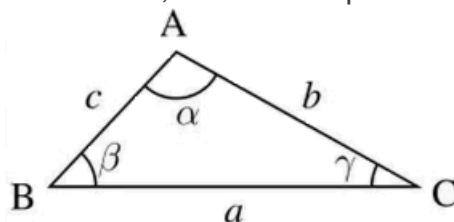
- 2) Dois lados de um triângulo medem 3 cm e 6 cm, formando entre si um ângulo de 60° . Encontre a medida do terceiro lado desse triângulo.

3) **Aplicação na Física:** Duas pessoas puxam um barco, por meio de cordas que formam um ângulo de 60° , sabendo que $F_1 = 10 \text{ N}$ e $F_2 = 8 \text{ N}$, calcule a força resultante com a qual o barco se desloca até a margem. Considere $\sqrt{61} = 7,8$. **ATENÇÃO: a fórmula sofre uma alteração.**



Respostas: 1) $5\sqrt{3} \text{ m}$ 2) $3\sqrt{3} \text{ cm}$ 3) $15,6 \text{ N}$

Lei das Tangentes: estabelece a relação entre as tangentes de dois ângulos de um triângulo e os comprimentos de seus lados opostos. Dessa forma, para um triângulo ABC, de lados a, b, c, e ângulos α , β e γ , opostos a estes três lados, têm-se a expressão:



$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left[\frac{1}{2}(A+B)\right]}{\tan\left[\frac{1}{2}(A-B)\right]}$$

A Lei das Tangentes não costuma ser estudada no ensino médio.